



# Szybka wielobiegunowa metoda elementów brzegowych w analizie układów liniowosprężystych

## Wprowadzenie do metody elementów brzegowych

dr inż. Jacek Ptaszny

Rzeszów, 15-16.04.2011



# Plan prezentacji

- I Wprowadzenie do metody elementów brzegowych
- II Algorytm SWMEB. Część 1.
- III Algorytm SWMEB. Część 2.
- IV Przykłady analizy. Część 1.
- V Przykłady analizy. Część 2.



# Plan prezentacji

## Wprowadzenie do metody elementów brzegowych

- 1 Równanie metody elementów brzegowych (MEB)
- 2 Dyskretyzacja i aproksymacja geometrii i wielkości fizycznych
- 3 Równanie macierzowe
- 4 Obliczanie naprężeń
- 5 Podsumowanie
- 6 Literatura



# Plan prezentacji

- 1 Równanie metody elementów brzegowych (MEB)
- 2 Dyskretyzacja i aproksymacja geometrii i wielkości fizycznych
- 3 Równanie macierzowe
- 4 Obliczanie naprężeń
- 5 Podsumowanie
- 6 Literatura



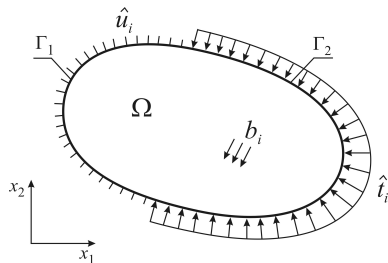
# Płaskie zagadnienie liniowej sprężystości

## Cel analizy

Wyznaczenie nieznanymi przemieszczeń  $u_i$  i sił powierzchniowych  $t_i$  na brzegu ciała.

Oznaczenia:

- $\Omega$  - obszar ciała,
- $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  - brzeg ciała,
- $\Gamma_1$  - fragment brzegu z zadanymi przemieszczeniami  $\hat{u}_i$ ,
- $\Gamma_2$  - fragment brzegu z zadanymi siłami powierzchniowymi  $\hat{t}_i$ ,
- $b_i$  - znane pole sił objętościowych.



*Płaskie ciało liniowosprężyste w stanie równowagi*



# Równanie metody elementów brzegowych

Sformułowanie bezpośrednie w wersji kolokacyjnej

$$C_{ij}u_j(x') + \int_{\Gamma} T_{ij}(x', x) u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}(x', x) t_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} U_{ij}(x', x) b_j(x) d\Omega(x) \quad (1)$$

Oznaczenia:

- $x'$  - punkt kolokacji,
- $x$  - punkt całkowania,
- $C_{ij}$  - współczynniki zależne od położenia punktu kolokacji:

$$C_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{dla } x' \in \text{int } \Omega, \\ 0 & \text{dla } x' \notin \Omega, \\ \frac{1}{2}\delta_{ij} & \text{dla } x' \in \Gamma - \text{gładki brzeg,} \end{cases} \quad (2)$$

- $U_{ij}, T_{ij}$  - rozwiązania podstawowe (Kelvina).



# Rozwiązania podstawowe

$$U_{ij}(x', x) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} [(4\nu - 3)\delta_{ij}\ln(r) + r_{,i}r_{,j}], \quad (3)$$

$$T_{ij}(x', x) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1 - 2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] - (1 - 2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \right\}. \quad (4)$$

Oznaczenia:

- $\mu$  - moduł Kirchhoffa,
- $\nu$  - liczba Poissona,
- $r = |x - x'|$ ,
- $n_j$  - wersor normalny do brzegu w punkcie  $x$ .



# Rozwiązania podstawowe

$$U_{ij}(x', x) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} [(4\nu - 3)\delta_{ij} \ln(r) + r_{,i}r_{,j}], \quad (3)$$

$$T_{ij}(x', x) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1 - 2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] - (1 - 2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \right\}. \quad (4)$$

Osobliwości ( $x \rightarrow x', r \rightarrow 0$ ):

- $\ln(r)$  - słaba,
- $\frac{1}{r}$  - silna.





# Składniki równania całkowego

- Potencjał objętościowy o gęstości  $b_j(x)$ :

$$\sum_j J_{ij}^U(x') = \int_{\Omega} U_{ij}(x', x) b_j(x) d\Omega(x), \quad x' \in \Omega, \quad x \in \text{int } \Omega, \quad (5)$$

- Potencjał warstwy pojedynczej o gęstości  $t_j(x)$ :

$$\sum_j I_{ij}^U(x') = \int_{\Gamma} U_{ij}(x', x) t_j(x) d\Gamma(x), \quad x' \in \Omega, \quad x \in \Gamma, \quad (6)$$

- Potencjał warstwy podwójnej o gęstości  $u_j(x)$ :

$$\sum_j I_{ij}^T(x') = \int_{\Gamma} T_{ij}(x', x) u_j(x) d\Gamma(x), \quad x' \in \Omega, \quad x \in \Gamma. \quad (7)$$



# Składniki równania całkowego

## Składniki objętościowe

### Zagadnienia:

- obecność składników źródłowych (np. termosprężystość),
- zagadnienie własne (np. drgania swobodne),
- zagadnienia nieliniowe (np. układy sprężysto-plastyczne),
- układy niejednorodne (np. materiały gradientowe),
- ...

W przypadku zachowawczych pól sił objętościowych całki po obszarze można transformować do całek brzegowych (siły: ciężkości, odśrodkowe oraz siły obecne w zagadnieniu stacjonarnego pola temperatury spełniającego równanie Poissona.



# Składniki równania całkowego

## Składniki objętościowe

Metody analizy układów z uwzględnieniem składników objętościowych:

- całkowania po obszarze,
- rozwiązań szczególnych - brak całek po obszarze,
- wielokrotnej zasady wzajemności - brak całek po obszarze.

Porównanie metod:

Ingber M.S., Mammoli A.A., Brown M.J., A comparison of domain integral evaluation techniques for boundary element methods, *Int J Numer Meth Engng*, 52, 417-432, 2001.

Zdaniem cytowanych autorów metody całkowania bezpośredniego są efektywniejsze pod względem czasu obliczeń (zwłaszcza w przypadku zastosowania metod wielobiegunowych) oraz dokładniejsze od pozostałych.



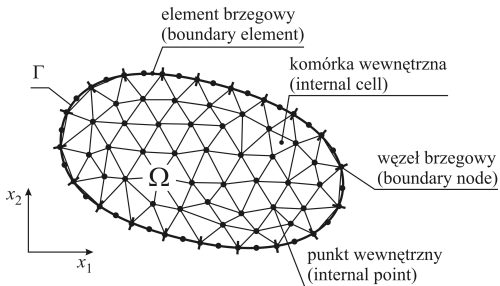
# Plan prezentacji

- 1 Równanie metody elementów brzegowych (MEB)
- 2 Dyskretyzacja i aproksymacja geometrii i wielkości fizycznych
- 3 Równanie macierzowe
- 4 Obliczanie naprężeń
- 5 Podsumowanie
- 6 Literatura



# Elementy brzegowe i komórki wewnętrzne

- **Elementy brzegowe** - aproksymacja wielkości brzegowych.
- **Komórki wewnętrzne** - aproksymacja sił objętościowych.





# Aproksymacja wielkości brzegowych

- Współrzędne punktów:  $x_i = \sum_{k=1}^K N_b^k(\xi) x_i^{hk}$ .

- Przemieszczenia:  $u_i = \sum_{k=1}^K N_b^k(\xi) u_i^{hk}$ .

- Siły powierzchniowe:  $t_i = \sum_{k=1}^K N_b^k(\xi) t_i^{hk}$ .

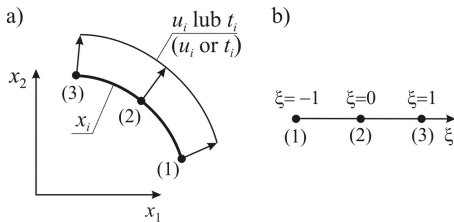
Oznaczenia:

- $N_b^k(\xi)$  - funkcje kształtu elementu brzegowego,
- $\xi$  - lokalny układ współrzędnych elementu,
- $K$  - liczba węzłów w elemencie,
- $k$  - numer węzła elementu brzegowego,
- $h$  - numer elementu brzegowego.



# Trójwęzłowy element brzegowy

## Postać i funkcje kształtu



*Element w globalnym (a) i lokalnym (b) układzie współrzędnych*

Funkcje kształtu:

$$\begin{aligned}
 N_b^1(\xi) &= -\frac{1}{2}\xi(1 - \xi), & N_b^2(\xi) &= (1 - \xi)(1 + \xi), \\
 N_b^3(\xi) &= \frac{1}{2}\xi(1 + \xi).
 \end{aligned}
 \tag{8}$$



# Trójwęzłowy element brzegowy

## Transformacja do układu lokalnego

- Różniczka brzegu:

$$d\Gamma(x) = J(\xi)d\xi. \quad (9)$$

- Jakobian przekształcenia:

$$J(\xi) = \left[ \left( \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

- Składowe wektora jednostkowego normalnego do brzegu - w rozwiązaniu podstawowym  $T_{ij}(x', x)$ :

$$n_1 = \frac{1}{J(\xi)} \frac{\partial x_2}{\partial \xi}, \quad n_2 = \frac{-1}{J(\xi)} \frac{\partial x_1}{\partial \xi}. \quad (11)$$





# Aproksymacja wielkości wewnątrz obszaru

- Współrzędne punktów:  $x_i = \sum_{l=1}^L N_w^l(\xi, \eta) x_i^{ql}$ .
- Siły objętościowe:  $b_i = \sum_{l=1}^L N_w^l(\xi, \eta) b_i^{ql}$ .

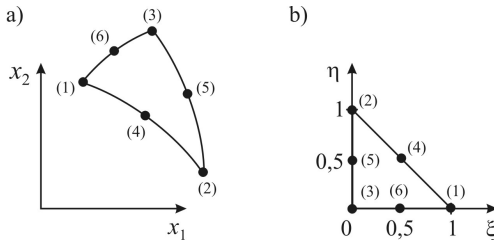
Oznaczenia:

- $L$  - liczba punktów definiujących komórkę wewnętrzną,
- $N_w^l(\xi, \eta)$  - funkcje kształtu,
- $\xi, \eta$  - współrzędne układu lokalnego,
- $x_i^{ql}$  - współrzędne węzła komórki wewnętrznej,
- $b_i^{ql}$  - składowe sił objętościowych,
- $l$  - numer węzła komórki wewnętrznej,
- $q$  - numer komórki wewnętrznej.



# Sześcioramienna komórka wewnętrzna

## Postać i funkcje kształtu



*Komórka wewnętrzna w globalnym (a) i lokalnym (b) układzie współrzędnych*

Funkcje kształtu:

$$\begin{aligned}
 N_w^1(\xi, \eta) &= \xi(2\xi - 1), & N_w^2(\xi, \eta) &= \eta(2\eta - 1), \\
 N_w^3(\xi, \eta) &= \zeta(2\zeta - 1), & N_w^4(\xi, \eta) &= 4\xi\eta, \\
 N_w^5(\xi, \eta) &= 4\eta\zeta, & N_w^6(\xi, \eta) &= 4\zeta\xi, \\
 \zeta &= 1 - \xi - \eta.
 \end{aligned}
 \tag{12}$$



# Sześciowęzłowa komórka wewnętrzna

## Transformacja do układu lokalnego

- Różniczka powierzchni:

$$d\Omega(x) = |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta. \quad (13)$$

- Jakobian przekształcenia:

$$J(\xi, \eta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{vmatrix}. \quad (14)$$



# Elementy brzegowe i komórki wewnętrzne

## Podsumowanie

Elementy brzegowe lub komórki wewnętrzne, w których wielkości fizyczne i geometria aproksymowane są za pomocą tych samych funkcji kształtu nazywane są **izoparamerycznymi**.

Stopień aproksymacji wielkości brzegowych i wielkości wewnątrz obszaru nie musi być taki sam. Różne stopnie aproksymacji mogą jednak prowadzić do zmniejszenia dokładności obliczeń.



# Plan prezentacji

- 1 Równanie metody elementów brzegowych (MEB)
- 2 Dyskretyzacja i aproksymacja geometrii i wielkości fizycznych
- 3 Równanie macierzowe
- 4 Obliczanie naprężeń
- 5 Podsumowanie
- 6 Literatura



# Układ równań

$$\begin{aligned}
 C_{ij} u_i(x') + \sum_{h=1}^P \sum_{k=1}^K u_i^{hk} \int_{-1}^1 T_{ij}[x', x(\xi)] N_b^k(\xi) J(\xi) d\xi = \\
 \sum_{h=1}^P \sum_{k=1}^K t_i^{hk} \int_{-1}^1 U_{ij}[x', x(\xi)] N_b^k(\xi) J(\xi) d\xi + \\
 \sum_{q=1}^R \sum_{l=1}^L b_i^{ql} \int_0^1 \int_0^{1-\xi} U_{ij}[x', x(\xi, \eta)] N_w^l(\xi, \eta) J(\xi, \eta) d\eta d\xi.
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Oznaczenia:

- $K$  - liczba węzłów elementu brzegowego,
- $L$  - liczba węzłów komórki wewnętrznej,
- $P$  - liczba elementów brzegowych,
- $R$  - liczba komórek wewnętrznych.



# Równanie macierzowe

## Założenia

- Punktami kolokacji są wszystkie węzły brzegowe.
- Wprowadza się numerację globalną węzłów  $1, 2, \dots, W$ .

$$\begin{bmatrix} \bar{H}_{ij}^{11} & \dots & H_{ij}^{1b} & \dots & H_{ij}^{1W} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{ij}^{a1} & \dots & \bar{H}_{ij}^{aa} & \dots & H_{ij}^{aW} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{ij}^{W1} & \dots & H_{ij}^{Wb} & \dots & \bar{H}_{ij}^{WW} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j^1 \\ \vdots \\ u_j^b \\ \vdots \\ u_j^W \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{is}^{11} & \dots & G_{is}^{1h} & \dots & G_{is}^{1P} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{is}^{a1} & \dots & G_{is}^{ah} & \dots & G_{is}^{aP} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{is}^{W1} & \dots & G_{is}^{Wh} & \dots & G_{is}^{WP} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_s^1 \\ \vdots \\ t_s^h \\ \vdots \\ t_s^P \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_i^1 \\ \vdots \\ B_i^a \\ \vdots \\ B_i^W \end{Bmatrix} \quad (16)$$



# Równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix} \bar{H}_{ij}^{11} & \dots & H_{ij}^{1b} & \dots & H_{ij}^{1W} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{ij}^{a1} & \dots & \bar{H}_{ij}^{aa} & \dots & H_{ij}^{aW} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{ij}^{W1} & \dots & H_{ij}^{Wb} & \dots & \bar{H}_{ij}^{WW} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j^1 \\ \vdots \\ u_j^b \\ \vdots \\ u_j^W \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{is}^{11} & \dots & G_{is}^{1h} & \dots & G_{is}^{1P} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{is}^{a1} & \dots & G_{is}^{ah} & \dots & G_{is}^{aP} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{is}^{W1} & \dots & G_{is}^{Wh} & \dots & G_{is}^{WP} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_s^1 \\ \vdots \\ t_s^h \\ \vdots \\ t_s^P \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_i^1 \\ \vdots \\ B_i^a \\ \vdots \\ B_i^W \end{Bmatrix} \quad (16)$$

**a** - numer węzła będącego punktem kolokacji

**b** - numer węzła określającego element brzegowy zawierający punkty całkowania





# Równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix} \bar{H}_{ij}^{11} & \dots & H_{ij}^{1b} & \dots & H_{ij}^{1W} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{ij}^{a1} & \dots & \bar{H}_{ij}^{aa} & \dots & H_{ij}^{aW} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{ij}^{W1} & \dots & H_{ij}^{Wb} & \dots & \bar{H}_{ij}^{WW} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j^1 \\ \vdots \\ u_j^b \\ \vdots \\ u_j^W \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{is}^{11} & \dots & G_{is}^{1h} & \dots & G_{is}^{1P} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{is}^{a1} & \dots & G_{is}^{ah} & \dots & G_{is}^{aP} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{is}^{W1} & \dots & G_{is}^{Wh} & \dots & G_{is}^{WP} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_s^1 \\ \vdots \\ t_s^h \\ \vdots \\ t_s^P \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_i^1 \\ \vdots \\ B_i^a \\ \vdots \\ B_i^W \end{Bmatrix} \quad (16)$$

$H_{ij}^{ab}$  dla  $a \neq b$  ( $i, j = 1, 2$ ) - elementy macierzy zawierające całki rozwiązania podstawowego  $T_{ij}(x', x)$ .



# Równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix} \bar{H}_{ij}^{11} & \dots & H_{ij}^{1b} & \dots & H_{ij}^{1W} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{ij}^{a1} & \dots & \bar{H}_{ij}^{aa} & \dots & H_{ij}^{aW} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{ij}^{W1} & \dots & H_{ij}^{Wb} & \dots & \bar{H}_{ij}^{WW} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j^1 \\ \vdots \\ u_j^b \\ \vdots \\ u_j^W \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{is}^{11} & \dots & G_{is}^{1h} & \dots & G_{is}^{1P} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{is}^{a1} & \dots & G_{is}^{ah} & \dots & G_{is}^{aP} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{is}^{W1} & \dots & G_{is}^{Wh} & \dots & G_{is}^{WP} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_s^1 \\ \vdots \\ t_s^h \\ \vdots \\ t_s^P \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_i^1 \\ \vdots \\ B_i^a \\ \vdots \\ B_i^W \end{Bmatrix} \quad (16)$$

$\bar{H}_{ij}^{aa}$  - sumy całek osobliwych zależnych od  $T_{ij}(x', x)$  oraz współczynników  $C_{ij}$



# Równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix} \bar{H}_{ij}^{11} & \dots & H_{ij}^{1b} & \dots & H_{ij}^{1W} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{ij}^{a1} & \dots & \bar{H}_{ij}^{aa} & \dots & H_{ij}^{aW} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{ij}^{W1} & \dots & H_{ij}^{Wb} & \dots & \bar{H}_{ij}^{WW} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j^1 \\ \vdots \\ u_j^b \\ \vdots \\ u_j^W \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{is}^{11} & \dots & G_{is}^{1h} & \dots & G_{is}^{1P} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{is}^{a1} & \dots & G_{is}^{ah} & \dots & G_{is}^{aP} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{is}^{W1} & \dots & G_{is}^{Wh} & \dots & G_{is}^{WP} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_s^1 \\ \vdots \\ t_s^h \\ \vdots \\ t_s^P \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_i^1 \\ \vdots \\ B_i^a \\ \vdots \\ B_i^W \end{Bmatrix} \quad (16)$$

$u_j^b$  - składowe przemieszczeń węzła  $b$



# Równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix} \bar{H}_{ij}^{11} & \cdots & H_{ij}^{1b} & \cdots & H_{ij}^{1W} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{ij}^{a1} & \cdots & \bar{H}_{ij}^{aa} & \cdots & H_{ij}^{aW} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{ij}^{W1} & \cdots & H_{ij}^{Wb} & \cdots & \bar{H}_{ij}^{WW} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j^1 \\ \vdots \\ u_j^b \\ \vdots \\ u_j^W \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{is}^{11} & \cdots & G_{is}^{1h} & \cdots & G_{is}^{1P} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{is}^{a1} & \cdots & G_{is}^{ah} & \cdots & G_{is}^{aP} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{is}^{W1} & \cdots & G_{is}^{Wh} & \cdots & G_{is}^{WP} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_s^1 \\ \vdots \\ t_s^h \\ \vdots \\ t_s^P \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_i^1 \\ \vdots \\ B_i^a \\ \vdots \\ B_i^W \end{Bmatrix} \quad (16)$$

$G_{is}^{ah}$  ( $i = 1, 2; s = 1, 2, \dots, 6$ ) - całki zależne od  $U_{ij}(x', x)$



# Równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix} \bar{H}_{ij}^{11} & \dots & H_{ij}^{1b} & \dots & H_{ij}^{1W} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{ij}^{a1} & \dots & \bar{H}_{ij}^{aa} & \dots & H_{ij}^{aW} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{ij}^{W1} & \dots & H_{ij}^{Wb} & \dots & \bar{H}_{ij}^{WW} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j^1 \\ \vdots \\ u_j^b \\ \vdots \\ u_j^W \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{is}^{11} & \dots & G_{is}^{1h} & \dots & G_{is}^{1P} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{is}^{a1} & \dots & G_{is}^{ah} & \dots & G_{is}^{aP} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{is}^{W1} & \dots & G_{is}^{Wh} & \dots & G_{is}^{WP} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_s^1 \\ \vdots \\ t_s^h \\ \vdots \\ t_s^P \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_i^1 \\ \vdots \\ B_i^a \\ \vdots \\ B_i^W \end{Bmatrix} \quad (16)$$

$t_s^h$  - składowe sił powierzchniowych węzłów elementu brzegowego  $h$  (możliwe jest modelowanie nieciągłości sił powierzchniowych).



# Równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix} \bar{H}_{ij}^{11} & \dots & H_{ij}^{1b} & \dots & H_{ij}^{1W} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{ij}^{a1} & \dots & \bar{H}_{ij}^{aa} & \dots & H_{ij}^{aW} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{ij}^{W1} & \dots & H_{ij}^{Wb} & \dots & \bar{H}_{ij}^{WW} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j^1 \\ \vdots \\ u_j^b \\ \vdots \\ u_j^W \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{is}^{11} & \dots & G_{is}^{1h} & \dots & G_{is}^{1P} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{is}^{a1} & \dots & G_{is}^{ah} & \dots & G_{is}^{aP} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{is}^{W1} & \dots & G_{is}^{Wh} & \dots & G_{is}^{WP} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_s^1 \\ \vdots \\ t_s^h \\ \vdots \\ t_s^P \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_i^1 \\ \vdots \\ B_i^a \\ \vdots \\ B_i^W \end{Bmatrix} \quad (16)$$

$B_i^a$  - całki po obszarze zależne od  $U_{ij}(x', x)$



# Równanie macierzowe

## Metoda ruchu ciała sztywnego

Elementy diagonalne  $\bar{H}_{ij}^{aa}$  (równanie (16)) zawierają sumy współczynników  $C_{ij}$  oraz całek osobliwych zależnych od  $T_{ij}(x', x)$  (osobliwość typu  $1/r$  - silna; całki istnieją w sensie wartości głównej Cauchy'ego).

### Ruch ciała sztywnego

- Brak sił powierzchniowych,  $t_s^h = 0$ .
- Brak sił objętościowych,  $B_i^a = 0$ .
- Jednostkowe przemieszczenia wszystkich węzłów w kierunku  $v$ ,  
 $u_j^a = \delta_{jv}$ .



# Równanie macierzowe

## Metoda ruchu ciała sztywnego

### Ruch ciała sztywnego

- Brak sił powierzchniowych,  $t_s^h = 0$ .
- Brak sił objętościowych,  $B_i^a = 0$ .
- Jednostkowe przemieszczenia wszystkich węzłów w kierunku  $v$ ,  
 $u_j^a = \delta_{jv}$ .

$$\left( \bar{H}_{ij}^{aa} + \sum_{b, b \neq a} H_{ij}^{ab} \right) \delta_{jv} = 0, \quad i, j, v = 1, 2; \quad a, b = 1, 2, \dots, W \quad (17)$$

- Ciało ograniczone:

$$\bar{H}_{ij}^{aa} = - \sum_{b, b \neq a} H_{ij}^{ab} \quad (18)$$

- Ciało nieograniczone:

$$\bar{H}_{ij}^{aa} = 1 - \sum_{b, b \neq a} H_{ij}^{ab} \quad (19)$$





# Równanie macierzowe

## Metody całkowania numerycznego

- Niesobliwe całki liniowe - kwadratury Gaussa
- Całki osobliwe zależne od  $\ln(r)$  - kwadratury logarytmiczne Gaussa
- Niesobliwe całki powierzchniowe - kubatury Gaussa
- Osobliwe całki powierzchniowe zależne od  $\ln(r)$  - regularyzacja przez transformację współrzędnych - zastąpienie całki po trójkącie całką po prostokącie



# Równanie macierzowe

- Zapis w zwartej formie:

$$[H]\{U\} = [G]\{T\} + \{B\}. \quad (20)$$

- Uwzględnienie warunków brzegowych:

$$[A]\{X\} = [D]\{Y\} + \{B\}, \quad (21)$$

- ▷  $\{X\}$  - wektor niewiadomych,
- ▷  $\{Y\}$  - wektor wielkości znanych,
- ▷  $[A], [D]$  - macierze utworzone przez przegrupowanie kolumn macierzy  $[H]$  i  $[G]$ .

- Ostateczna postać układu równań:

$$[A]\{X\} = \{Z\}. \quad (22)$$

Pełne i niesymetryczne macierze



# Plan prezentacji

- 1 Równanie metody elementów brzegowych (MEB)
- 2 Dyskretyzacja i aproksymacja geometrii i wielkości fizycznych
- 3 Równanie macierzowe
- 4 Obliczanie naprężeń
- 5 Podsumowanie
- 6 Literatura



# Obliczanie naprężeń

## Punkty wewnętrzne

Równanie naprężeń uzyskane w wyniku zastosowania związków geometrycznych oraz uogólnionego prawa Hooke'a:

$$\begin{aligned} \sigma_{jk}(x') = & \int_{\Gamma} U_{ijk}(x', x) t_i(x) d\Gamma(x) \\ & - \int_{\Gamma} T_{ijk}(x', x) u_i(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} U_{ijk}(x', x) b_i(x) d\Omega(x), \end{aligned} \quad (23)$$

- $U_{ijk}(x', x)$ ,  $T_{ijk}(x', x)$  - rozwiązania podstawowe równania naprężeń,
- Równanie stosowane do obliczania naprężeń w punktach wewnętrznych obszaru.
- W przypadku obliczania naprężeń na brzegu należało by obliczać całki o silnej osobliwości oraz hiperosobliwe (osobliwości typu  $r^{-1}$  i  $r^{-2}$ ).



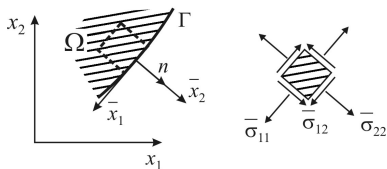
# Obliczanie naprężeń

## Węzły brzegowe

- Zastosowanie znanych sił powierzchniowych oraz pochodnych przemieszczeń.
- Naprężenia w lokalnym układzie współrzędnych związanym z brzegiem:

$$\bar{\sigma}_{11} = \frac{1}{1-\nu}(2\mu \bar{\varepsilon}_{11} + \nu \bar{t}_2), \quad \bar{\sigma}_{22} = \bar{t}_2, \quad \bar{\sigma}_{12} = \bar{t}_1, \quad (24)$$

- ▷  $\bar{t}_i$  - składowe sił powierzchniowych transformowane do układu  $\bar{x}_i$ ,
- ▷  $\bar{\varepsilon}_{11}$  - odkształcenie w kierunku stycznym do brzegu.



Naprężenia w lokalnym układzie współrzędnych



# Plan prezentacji

- 1 Równanie metody elementów brzegowych (MEB)
- 2 Dyskretyzacja i aproksymacja geometrii i wielkości fizycznych
- 3 Równanie macierzowe
- 4 Obliczanie naprężeń
- 5 Podsumowanie**
- 6 Literatura



# Podsumowanie

## Zalety MEB

- Dla wielu zagadnień dyskretyzacja tylko brzegu obszaru.
- Łatwe przygotowanie modelu.
- Stosunkowo mały rozmiar układu równań w porównaniu z innymi metodami (MRS, MES).
- Analiza obszarów nieskończonych lub półnieskończonych bez konieczności wprowadzania sztucznych brzegów.



# Podsumowanie

## Wady MEB

- Trudność uzyskania rozwiązań podstawowych dla niektórych zagadnień (anizotropia, niejednorodność ośrodka i inne).
- Mała efektywność w analizie ciał których jeden lub dwa wymiary są znacznie mniejsze od pozostałych.
- Konieczność dyskretyzacji obszaru lub jego fragmentu w przypadku występowania składników objętościowych w równaniu całkowym.
- Czas obliczeń rzędu co najmniej  $O(N^2)$  - w zależności od zastosowanej metody rozwiązywania układu równań.
- Zajmowana pamięć komputera rzędu  $O(N^2)$ .





Implementacja i porównanie pięciu różnych wariantów metody:

Kok Hwa Yu, A.Halim Kadarman, Harijono Djodihardjo, Development and implementation of some BEM variants — A critical review. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 34 (2010), 884-899.

Wybrane wnioski Autorów:







- Spośród wszystkich wariantów MEB wersja kolokacyjna jest najprostszą w implementacji.
- MEB pomimo szybkiego rozwoju nie jest w stanie zastąpić metody elementów skończonych (MES).
- Aktualnie należy stosować i rozwijać nowe, efektywniejsze wersje metody, a wśród nich **szybką wielobiegunową MEB**.









# Plan prezentacji

- 1 Równanie metody elementów brzegowych (MEB)
- 2 Dyskretyzacja i aproksymacja geometrii i wielkości fizycznych
- 3 Równanie macierzowe
- 4 Obliczanie naprężeń
- 5 Podsumowanie
- 6 Literatura



-  Brebbia C.A., *Topics in boundary element research. Volume 3: Computational aspects*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York - London - Paris - Tokyo, 1987.
-  Brebbia C.A., Dominguez J., *Boundary elements an introductory course*, McGraw-Hill, New York, 1992.
-  Burczyński T., *Metoda elementów brzegowych w mechanice*, WNT, Warszawa, 1995.
-  Dominguez J., *Boundary elements in dynamics*, Computational Mechanics Publications, Southampton, 1993.
-  Fedeliński P., *Metoda elementów brzegowych w analizie dynamicznej układów odkształcalnych z pęknięciami*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Mechanika, z. 137, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice, 2000.
-  Huang Q., Cruse T.A., Some notes on singular integral techniques in boundary element analysis, *Int J Numer Meth Eng*, 36, 2643-2659, 1993.



-  Ingber M.S., Mammoli A.A., Brown M.J., A comparison of domain integral evaluation techniques for boundary element methods, *Int J Numer Meth Engng*, 52, 417-432, 2001.
-  Kane J.H., *Boundary element analysis in engineering continuum mechanics*, Prentice-Hall, New Jersey, 1994.
-  Kleiber M. (red.), *Komputerowe metody mechaniki ciał stałych*, Mechanika Techniczna, Tom IX, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1995.
-  Schwab C., Wendland W.L., On numerical cubatures of singular surface integrals in boundary element methods, *Numer Math*, 62, 343-369, 1992.
-  Tanaka M., Sladek V., Sladek J., Regularization techniques applied to boundary element methods, *Appl Mech Rev*, 47, 10, 457-499, 1994.
-  Telles J.C.F., *The boundary element method applied to inelastic problems*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York - Tokyo, 1983.



# Dziękuję za uwagę

LaTeX Template based on Oxygen, <http://www.kde.org/kdeslides/>